

SCHEDE DI MATEMATICA

ANALISI INFINITESIMALE

Coordinate cartesiane nello spazio Si definisce **sistema di riferimento**, l'insieme dei riferimenti utilizzati per individuare la posizione di un oggetto nello spazio. **Il sistema cartesiano** è costituito da una coppia di rette incidenti. Tali rette sono indicate, in genere, con X e Y, ed il loro punto di intersezione è l'origine per entrambe le rette. Su ciascuna retta si fissa un verso di percorrenza ed un'unità di misura che in genere è uguale per entrambe le rette, ma per esigenze particolari può benissimo essere diversa per ciascuna retta. La posizione di un punto vincolato a muoversi su un piano può essere individuata da una coppia di valori reali, genericamente indicati con le lettere x (*ascissa*) e y (*ordinata*). La coppia di coordinate che individua il punto si indica scrivendo (x,y) .

Distanza tra due punti la distanza di due punti è data dalla radice quadrata della somma dei quadrati delle differenze fra le coordinate dello stesso nome

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Punto medio di un segmento Vogliamo trovare le coordinate del punto medio M di un segmento, i cui estremi sono i punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

Le coordinate di un punto medio di un segmento sono le medie aritmetiche delle coordinate omonime degli estremi.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Equazione cartesiana di un piano

L'equazione $ax + by + cz = 0$ è detta equazione generale cartesiana di un piano (a,b,c costanti)

Rappresentazione cartesiana di una retta nello spazio La rappresentazione cartesiana di una retta nello spazio può essere data in tre modi:

- Retta passante per due punti qualsiasi distinti

$$x - x_1 / x_2 - x_1 = y - y_1 / y_2 - y_1 = z - z_1 / z_2 - z_1$$

- Retta in forma parametrica

$$x - x_1 / l = y - y_1 / m = z - z_1 / n$$

- Retta come intersezione di due piani non paralleli

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$a^1x + b^1y + c^1z + d = 0$$

Parallelismo nel piano Due o più rette distinte nello stesso piano euclideo sono parallele se e solo se non hanno alcun punto in comune, cioè se non si incontrano mai

Condizione di parallelismo tra due rette Due rette del piano sono parallele se e soltanto se hanno proporzionali i coefficienti delle variabili oppure hanno lo stesso coefficiente angolare.

Condizione di perpendicolarità tra due rette la condizione affinché due rette siano perpendicolari è che i loro coefficienti angolari siano fra loro reciproci e di segno contrario

Parallelismo tra retta e piano Una retta r è parallela ad un piano α quando r risulta parallela ad una retta s appartenente ad α .

Parallelismo fra piani la condizione è data da:

$$a/a^1 = b/b^1 = c/c^1$$

ANALISI DELLE SERIE STORICHE

Generalità Una serie storica o temporale è formata da una successione di osservazioni di un determinato fenomeno, che stiamo studiando, riferite ai vari tempi successivi.

Grafici delle serie storiche nell'esame di una serie storica si deve, come prima cosa, tracciare il grafico delle osservazioni rilevate rispetto al tempo, si usano grafici sul piano cartesiano in scala naturale o semilogaritmica. I grafici sono solitamente delle spezzate o delle curve.

Movimenti delle serie storiche alcuni autori hanno trovato un'analogia fra il grafico di una serie storica e la traiettoria di una particella materiale sotto l'azione di forze fisiche, così un fenomeno economico è soggetto a movimenti dovuti a forze economiche, sociali, ecc..

Movimento tendenziale o trend si manifesta con un andamento crescente, decrescente, o costante; in generale il trend è generato da cause profonde che agiscono per un lungo periodo di tempo.

Movimento stagionale provoca variazioni che si manifestano negli stessi mesi in anni successivi (ad esempio l'incremento delle vendite nei periodi pre-natalizi).

Movimento ciclico imprime al fenomeno delle oscillazioni periodiche e non periodiche intorno alla curva del trend, dovute ai cosiddetti "cicli economici" che in genere hanno durata pluriennale.

Movimento accidentale o casuale provoca delle piccole oscillazioni dovute ad eventi casuali, come scioperi, elezioni, ecc.

Criteri operativi Si riassumono i procedimenti che permettono di analizzare le serie storiche distinguendo due casi

a) la serie presenta i dati rilevati per anni, si determinano:

- il movimento tendenziale (con il metodo "*dei minimi quadrati*" o quello "*della media mobile*")
- il movimento ciclico lordo
- il movimento accidentale

b) la serie presenta i dati rilevati mensilmente per un certo numero di anni, si determinano:

- il movimento tendenziale
 - il movimento stagionale (con il metodo "*della serie ideale di 12 mesi*" o con quello "*della media mobile*")
 - il movimento ciclico
 - il movimento accidentale
-

ELEMENTI DI STATISTICA MATEMATICA

Generalità La **statistica** è la scienza che ha come fine lo studio quantitativo e qualitativo di un "collettivo". Studia i modi (descritti attraverso [formule matematiche](#)) in cui una realtà [fenomenica](#) - limitatamente ai fenomeni collettivi - può essere sintetizzata e quindi compresa.

La scienza statistica è comunemente suddivisa in due branche principali:

- [statistica descrittiva](#)
- [statistica inferenziale](#)

La statistica descrittiva ha come scopo quello di sintetizzare i dati attraverso strumenti grafici (diagrammi a barre, a torta, boxplot, istogrammi, boxplot) e indici (indicatori statistici, indicatori di posizione come la media, di variazione come la varianza e la concentrazione, di correlazione, ecc.) che descrivono gli aspetti salienti dei dati osservati.

La statistica inferenziale ha come obiettivo, invece, quello di fare affermazioni, con una possibilità di errore controllata, riguardo la natura teorica (la legge probabilistica) del fenomeno che si osserva. La statistica inferenziale è fortemente legata alla teoria della probabilità

Rilevazione dei dati La prima operazione da compiere per analizzare un fenomeno collettivo, è quella della rilevazione, la quale consiste nella raccolta dei dati statistici riguardanti i fenomeni individuali che compongono il fenomeno collettivo oggetto dell'indagine.

I dati statistici Viene definita unità statistica ciascuna osservazione fatta sul fenomeno da indagare. Esempi di unità statistiche sono rappresentati da ogni individuo di una certa popolazione, ogni nato, ogni studente, ogni infortunio sul lavoro, ecc.

Rapporti statistici Spesso l'esposizione dei risultati di una rilevazione statistica non fornisce un valido strumento di conoscenza e di spiegazione del fenomeno indagato allora facciamo uso di indici e rapporti statistici che ci aiutano meglio ad evidenziare solo i dati che ci interessano e che stiamo studiando. Alcuni dei rapporti statistici più significativi:

Rapporto di densità Il rapporto di densità è il rapporto tra un dato quantitativo caratteristico di un fenomeno e la dimensione del campo di osservazione.

Il numero di abitanti per ogni km² è un rapporto di densità. Il dato quantitativo è il numero di abitanti e il campo di osservazione è la superficie

Rapporto di durata Il rapporto di durata è il rapporto tra l'intensità di un fenomeno collettivo in un dato istante e le variazioni quantitative che una parte del fenomeno stesso subisce durante un certo intervallo di tempo.

Esso esprime il tempo medio di permanenza di un elemento nel gruppo a cui appartiene. Accenniamo ad alcune possibilità applicative dei rapporti di durata.

È noto che gli Istituti di credito per lo svolgimento delle loro attività provvedono alla raccolta dei depositi (risparmi). Per la determinazione dei tassi da applicare nei confronti dei capitali depositati, e più in generale nello studio dei problemi connessi alla liquidità, è necessario conoscere un gran numero di dati statistici, convenientemente elaborati, fra i quali notevole importanza ha la durata media di giacenza dei depositi, cioè il tempo medio di permanenza dei depositi nelle Banche.

Rapporto di ripetizione

Si chiama rapporto di ripetizione l'inverso del rapporto di durata, Esso esprime quante volte una popolazione statistica si rinnova in un dato intervallo di tempo

INFERENZA STATISTICA

Definizione si definisce inferenza statistica il procedimento mediante il quale, dall'analisi dei dati osservati su un campione, si perviene a conclusioni relative all'intera popolazione.

Rilevazione dei dati La prima operazione da compiere per analizzare un fenomeno collettivo, è quella della rilevazione, la quale consiste nella raccolta dei dati statistici riguardanti i fenomeni individuali che compongono il fenomeno collettivo oggetto dell'indagine.

I dati statistici Viene definita unità statistica ciascuna osservazione fatta sul fenomeno da indagare. Esempi di unità statistiche sono rappresentati da ogni individuo di una certa popolazione, ogni nato, ogni studente, ogni infortunio sul lavoro, ecc.

Popolazione e campione l'impossibilità di investigare tutte le unità statistiche, il costo elevato della rilevazione, i limiti di tempo fa sì che spesso si ricorra allo studio su di un campione rappresentativo dell'intera popolazione, ossia di un limitato numero di unità che riproduca le caratteristiche dell'intera popolazione.

Campionamento casuale semplice si ha quando la scelta del campione rappresentativo è affidata esclusivamente al caso e non deve essere influenzata da chi compie l'indagine, in tal tipo di campionamento ogni unità della popolazione ha la stessa probabilità di fare parte del campione.

Distribuzione campionarie se si esegue una rilevazione totale si può associare ad ogni valore della variabile la frequenza con cui ogni valore compare nella popolazione, si ottiene così una *distribuzione di frequenze*.

Parametri e stimatori si definisce parametro di una popolazione statistica un valore caratteristico della popolazione, ossia una grandezza costante di quella popolazione e si indica genericamente con la lettera greca ϑ . Si definisce stimatore o statistica T del parametro θ , una funzione delle variabili campionarie X_i e si definisce stima il valore T calcolato con gli elementi di un certo campione.

Media campionaria e relativa distribuzione estraendo dalla popolazione campioni casuali di n elementi e indicando con X_1, X_2, \dots, X_n le n variabili casuali dei valori campionari, si definisce media campionaria la variabile casuale:

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n$$

Distribuzione campionaria della frequenza se in una popolazione si considera non una variabile, ma una mutabile, può essere utile conoscere quante unità della popolazione posseggono un certo attributo, ad esempio in un lotto di produzione quanti pezzi sono difettosi. Si possono distinguere due casi:

campionamento con estrazione bernoulliana, che comporta una distribuzione binomiale

campionamento con estrazione in blocco, che comporta una distribuzione ipergeometrica

Proprietà degli stimatori per valutare un parametro ϑ di una popolazione si sceglie uno stimatore T che fornisca buone stime per ϑ , cioè si sceglie una funzione T che assuma nei campioni valori prossimi a ϑ .

Uno stimatore T deve soddisfare ad alcune condizioni di cui le più importanti sono: correttezza, consistenza, efficienza.

Stime puntuali e stime per intervallo scelto lo stimatore che risulta migliore per stimare un parametro della popolazione si possono effettuare due tipi di stime: stime puntuali, se la stima si esprime con un valore numerico. La stima puntuale è più generale e più semplice da calcolare, si può applicare in ogni caso anche in assenza di informazioni sulla popolazione.

Stime di intervallo, se si determina un intervallo, che ad un prefissato livello di fiducia contiene il parametro incognito. Si applica se è nota la legge di distribuzione degli

stimatori, ha un ambito di applicazione più ristretto, ma permette di valutare meglio l'errore che si può commettere.

Stime puntuali di medie e frequenze il problema della stima puntuale di una media consiste nel valutare da un campione il valore μ della popolazione. A questo valore si associa lo scarto quadratico medio delle medie dei campioni, detto errore medio di campionamento

Stime per intervallo di una media la stima puntuale fornisce della media μ di una popolazione un valore \bar{x} ricavato dal campione scelto, che in generale non coincide con μ , ma può differirne per difetto o per eccesso. Conoscendo la distribuzione della media campionaria intorno a μ è più logico non stimare μ con un unico valore \bar{x} , ma ricavare un intervallo di \bar{x} nel quale μ è compreso, una volta prefissato un livello di fiducia.

Stime per intervallo della differenza di due medie si presenta qualche volta il problema di confrontare due medie μ_1 e μ_2 e per questo studio, generalmente, si prende in considerazione la loro differenza $\mu_1 - \mu_2$.

Si stima la differenza di $\mu_1 - \mu_2$ di due medie di popolazione con distribuzione normale, mediante la differenza $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ fra le medie di due campioni estratti a caso ed in modo indipendente.

La dimensione di un campione per decidere la dimensione n di un campione bisogna tenere conto: della variabilità della popolazione dalla quale il campione è estratto, dal costo che un campione grande può richiedere, dal livello di confidenza, e dalla precisione richiesta.

Il campione non deve essere né troppo piccolo, perché allora la stima risulterebbe poco precisa, né troppo grande, perché richiederebbe maggior tempo e maggior costo.

Per la determinazione della dimensione minima del campione, bisogna per prima cosa fissare la precisione della stima, ossia l'errore che si è disposti a sopportare.

Inoltre si deve stabilire il livello di confidenza desiderato e si deve conoscere la variabilità della popolazione.

La verifica delle ipotesi sulla popolazione si fa un'ipotesi statistica, estratto il campione, si deve verificare, con i dati ricavati dal campione, se l'ipotesi formulata è vera o falsa. Il procedimento della verifica delle ipotesi può essere:

parametrico se l'ipotesi riguarda un parametro della popolazione

non parametrico se l'ipotesi riguarda proprio la distribuzione stessa

Cenni su altre tecniche di campionamento

Campionamento per stratificazione si suddivide la popolazione in statisticamente omogenei e di ciascun strato si estrae un certo numero di elementi in modo casuale

Campionamento a più stadi se la popolazione è grande la si suddivide in tanti sottoinsiemi di questi se ne sceglie un certo numero che costituisce il primo stadio

Campionamento sistematico consiste nell'elencare tutte le unità statistiche della popolazione, e partendo da una prima scelta a caso, estrarre, successivamente, una unità ogni k unità.

RICERCA OPERATIVA

Definizione generale. La Ricerca Operativa è una metodologia che si propone di individuare, con procedimenti basati su concetti matematici e statistici, la condotta migliore per raggiungere, sotto certe condizioni, un obiettivo assegnato a priori. Essa costituisce un approccio scientifico alla risoluzione di problemi complessi, si può ricondurre all'ambito della matematica applicata ma presenta forti caratteristiche interdisciplinari relative in prevalenza a [matematica](#), [informatica](#), [economia](#) e finanza. Inoltre la ricerca operativa ha molte applicazioni commerciali soprattutto negli ambiti economico, logistico, militare, della progettazione di servizi e di sistemi di trasporto e nelle tecnologie. Nel caso particolare di problemi di carattere [economico](#), la funzione da massimizzare può coincidere con il massimo profitto ottenibile o con il minor costo da sostenere.

Scopi e metodi la ricerca operativa consiste nell'applicazione di un metodo scientifico, da parte di gruppi interdisciplinari, al fine di fornire soluzioni che meglio servano gli scopi dell'organizzazione nel suo insieme. Essa non si sostituisce ai responsabili della decisione ma, fornendo soluzioni dei problemi ottenute con metodi scientifici, permette di effettuare scelte razionali.

Le varie fasi:

Prima fase esame della situazione reale e raccolta delle informazioni

Seconda fase formulazione del problema

Terza fase costruzione del modello matematico che rappresenti al meglio il problema

Quarta fase soluzione del modello

Quinta fase analisi e verifica delle soluzioni ottenute

Modelli matematici I modelli matematici sono semplici rappresentazioni della realtà in forma semplificata i più importanti sono:

modelli iconici sono descrittivi della realtà come i mappamondi, i modelli di automobili, ecc.

modelli analogici utilizzano le proprietà di un insieme per determinare le proprietà di un altro insieme, come un impianto idraulico per rappresentare un impianto elettrico

modelli matematici o simbolici sono più astratti e si esprimono con relazioni matematiche tra le variabili e la grandezza da ottimizzare (come profitti, costi, tempi)

Programmazione lineare Fra i problemi di Ricerca Operativa, hanno assunto particolare importanza quelli di *Programmazione Lineare*. Si è in presenza di un programma lineare (oppure, il problema di [Ricerca Operativa](#) considerato è di Programmazione Lineare) quando il problema si traduce in un modello matematico costituito da:

- a. una funzione obiettivo lineare in n variabili (le variabili hanno tutte esponente pari a uno), che normalmente esprime un costo (da minimizzare) oppure un ricavo o un guadagno (da massimizzare);
- b. un sistema di vincoli espressi da equazioni o disequazioni, lineari nelle n variabili (cioè di primo grado): sono detti anche *vincoli tecnologici*;
- c. un sistema di vincoli di segno, che esprimono la non-negatività delle variabili, trattandosi di grandezze economiche.

si può risolvere un problema di questo tipo con il **metodo grafico**, i cui aspetti fondamentali sono descritti qui di seguito.

Dopo aver tracciato tutte le rette associate alle disequazioni ed equazioni del sistema dei vincoli, se l'intersezione derivante non è un insieme vuoto, si otterrà un poligono (o una regione illimitata) detto **regione ammissibile**, perché contiene tutte le coppie $(x; y)$ che

soddisfano le disequazioni e/o le equazioni del sistema. Ciascuna di queste coppie è detta **soluzione ammissibile**, mentre le coppie di valori che corrispondono ai vertici del poligono sono dette **soluzioni ammissibili di base**: fra esse va cercata, se esiste, la soluzione ottima del problema. In corrispondenza di ogni vertice del poligono, infatti, si calcola il valore della funzione obiettivo, e si sceglie la coppia che rende ottima (cioè massima o minima, a seconda dei casi) la funzione stessa

Problemi di scelta Per impostare un problema di scelta è necessario stabilire la funzione obiettivo, cioè quella grandezza fisica o monetaria che esprime il fine in base al quale s'intende effettuare la scelta. La funzione obiettivo, che traduce in termini matematici l'obiettivo fissato a priori, può essere un costo, un tempo di lavorazione, un consumo di energia, un ricavo, un guadagno ecc. La funzione obiettivo può dipendere da una o più variabili, dette variabili d'azione, ed è da rendere, a seconda del problema, massima o minima. I problemi di scelta possono essere classificati secondo criteri diversi

Problemi che comportano scelte in condizioni di certezza e immediatezza, cioè problemi nei quali gli effetti della scelta sono noti e immediati. Il problema consiste nel determinare il massimo o il minimo, di una funzione economica, o nella scelta del procedimento più conveniente fra varie alternative possibili. Esempio scelta per un utente tra due diversi piani telefonici.

Problemi che comportano scelte in condizioni di certezza con effetti differiti, cioè problemi nei quali le conseguenze della scelta sono certe ma differite nel tempo. Sono tipici i problemi di investimenti finanziari, investimenti commerciali, investimenti industriali. Esempio scelta tra due metodi di ammortamento di un prestito.

Problemi che comportano scelte in condizioni d'incertezza, cioè problemi nei quali gli effetti della scelta non sono certi ma dipendono dal verificarsi o meno di determinati eventi indipendenti dalla volontà di chi decide
